



الامتحان السداسي الأول في التحليل العددي 2

2022/02/09

3.أ.ت.ث.هـ. كهربائية

المدة: ساعة ونصف

قسم: تكنولوجيا

التمرين الأول (04 نقاط):

لدينا الشكل التربيعي لنيوتن-كوت (Newton-Côtes) يعطى بالشكل التالي:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \sum_{i=0}^n H_i y_i$$

حيث:

$$H_i = \frac{(-1)^{n-i}}{n! \cdot (n-i)!} \int_0^n \frac{q(q-1) \dots (q-n)}{q-i} dq \quad \text{و} \quad i=0,1,\dots,n, q = \frac{x-x_0}{h}$$

المعاملات H_i تسمى بمعاملات كوت (Côtes).
- انطلاقا من الشكل التربيعي لنيوتن-كوت استنتج صيغة شبه المنحرف البسيطة.

التمرين الثاني (08 نقاط):

$$I = \int_1^2 f(x)dx$$

ليكن التكامل التالي: I الدالة f معلوم قيمها عند النقاط التالية:

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$y = f(x)$	2,718	3,320	4,055	4,953	6,050	7,389

هل يمكن تطبيق قاعدة سامسون لحساب قيمة التكامل I باستخدام البيانات المعطاة؟ ان كانت اجابتك: نعم فأحسب قيمة التكامل I بهذه القاعدة. وان كانت: لا فاشرح لماذا؟، ثم أحسب قيمة التكامل I بطريقة أخرى تعرفها؟.

(ii) البيانات السابقة هي فعليا قيم الدالة $f(x) = e^x$. أوجد الخطأ الفعلي (E_{exact}) في تقديرك لقيمة I في السؤال (i).

(iii) نفرض البيانات الإضافية الجديدة التالية:

x	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
$y = f(x)$	3,004	3,669	4,482	5,474	6,686

أحسب قيمة التكامل I بقاعدة سامسون مستعينا بكل البيانات المتوفرة لديك الآن. ثم أوجد الخطأ الفعلي E_{exact} . ماذا نقول في هذه الحالة؟

(iv) أوجد أكبر قيمة يسمح بها للخطوة h بحيث يمكن حساب قيمة التكامل I بقاعدة شبه المنحرف، علما أن الخطأ لا يتجاوز $0,5 \times 10^{-4}$.

ملاحظة: كل الحسابات في هذا التمرين تعطى بالتقريب إلى 10^{-5} .

التمرين الثالث (08 نقطة) (Micro):

لتكن المعادلة غير الخطية التالية:

$$f(x) = xe^x - 3 = 0 \quad (1)$$

(1) بين أن المعادلة (1) تقبل جذرا وحيدا α في المجال $[1; 1,5]$.

(2) أوجد هذا الجذر α بيانيا.

(3) أ) هل يمكن تطبيق طريقة نيوتن-رافسون (N-R) لحساب الجذر α ، علما أن $x_0 = 1,5$ ؟ علل.

ب) أحسب الجذر α بثلاث تكرارات أولى باستخدام هذه الطريقة (بالتقريب إلى 10^{-3}).

(4) أدرس المعادلة (1) بطريقة النقطة الثابتة.

بالتوفيق

3GE

تصحيح الامتحان الأول
في مبادئ التحليل العددي 2

حل المقياس الأول (04 نقاط):

أولاً: الشكل التربيعي لنوتن - كوت (Newton-Cotes) يعطى بالشكل التالي:

$$\int_a^b f(u) du = (b-a) \sum_{i=0}^n H_i y_i$$
$$H_i = \frac{(-1)^{n-i}}{n! (n-i)!} \int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{q-i} dq \quad i=0,1,\dots,n \quad q = \frac{u-a}{h}$$

نعم صيغة شبه المكافئة عندما يكون $n=1$ وبالنسبة:

$$\int_a^b f(u) du = (b-a) \sum_{i=0}^1 H_i y_i \quad (0,5)$$

$$H_i = \frac{(-1)^{1-i}}{1 \cdot i! (1-i)!} \int_0^1 \frac{q(q-1)}{q-i} dq \quad (0,5)$$

$$H_0 = \frac{(-1)^{1-0}}{1 \cdot 0! (1-0)!} \int_0^1 \frac{q(q-1)}{q-0} dq = -\frac{1}{1} \int_0^1 (q-1) dq = -\int_0^1 q dq + \int_0^1 1 dq$$

$$= -\frac{1}{2} q^2 \Big|_0^1 + q \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$H_1 = \frac{(-1)^{1-1}}{1 \cdot 1! (1-1)!} \int_0^1 \frac{q(q-1)}{q-1} dq = \frac{1}{1} \int_0^1 q dq = \frac{1}{2} q^2 \Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$\int_a^b f(u) du = (b-a) [H_0 y_0 + H_1 y_1] = (b-a) \left[\frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{2} y_1 \right] \quad (1)$$
$$= \frac{(b-a)}{2} (y_0 + y_1) = \frac{h}{2} (y_0 + y_1) \quad / \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{1} = b-a$$

حل المقياس الثاني (08 نقاط):

ب) لدينا: $n=5$ (عدد مركب) (عدد الخطوات خردى) وبالنسبة لا يمكن تطبيق طريقة سيمبسون المركبة. 0,5

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5} = 0,2 \quad (0,25)$$

نأخذ $n=4$ ونطبق طريقة سيمبسون المركبة ونبقى الخطوة الأخيرة
نطبق عليها طريقة شبه المكافئة البسيطة. 0,5

$$I_5 = \frac{h}{3} \left[y_0 + y_{2m} + 2 \sum_{i=2}^m y_{2i-2} + 4 \sum_{i=1}^m y_{2i-1} \right] \Big|_{m=\frac{n}{2}=\frac{4}{2}=2}$$

$$= \frac{0,2}{3} [y_0 + y_4 + 2 y_2 + 4(y_1 + y_3)] \quad (1)$$

$$= \frac{0,2}{3} [2,718 + 6,050 + 2(4,055) + 4(3,320 + 4,953)] = 3,33133$$

- طريقة شبه المثلثية :

$$I_t = \frac{h}{2} (y_4 + y_5) = \frac{0,2}{2} (6,050 + 7,389) = 1,34390 \quad (0,5)$$

اذن :

$$I = I_s + I_t = 3,33133 + 1,34390 = 4,67523 \quad (0,5)$$

$$I_{\text{exact}} = \int_1^2 e^u du = e^u \Big|_1^2 = e^2 - e = 4,67077 \quad (1) \quad \text{(ii)}$$

معدل الخطأ النسبي :

$$E_{\text{exact}} = |I_{\text{exact}} - I| = |4,67523 - 4,67077| = 0,00446 \quad (0,5)$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0,1 \quad (0,2) \quad \text{(iii) معدل التكامل I بطريقة Trapezoidal :}$$

$$I = \frac{h}{3} \left[y_0 + y_{2m} + 2 \sum_{i=2}^m y_{2i-2} + 4 \sum_{i=1}^m y_{2i-1} \right] / m = \frac{h}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$= \frac{0,1}{3} [y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)]$$

$$= \frac{0,1}{3} (2,718 + 7,389 + 2(3,320 + 4,055) + 4(4,953 + 6,050) + 4(3,004 + 3,669 + 4,482 + 5,474 + 6,686))$$

$$= \frac{0,1}{3} (2,718 + 7,389 + 36,756 + 93,26) = 4,67077$$

معدل الخطأ النسبي :

$$E_{\text{exact}} = |I_{\text{exact}} - I| = 0 \quad (0,5)$$

- الملاحظة : كلما قلنا بتصغير طول الخطوة من 0,2 إلى 0,1 أصبحت طريقة Trapezoidal أدق بكثير مما كانت عليه (أي خطأ طفيف) $(0,5)$

$$E_t = \left| -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi) \right| \leq \left| -\frac{(b-a)}{12} h^2 \right| \cdot M \quad \text{(iv) لدينا :}$$

$$M = \max_{\xi \in [1,2]} f''(\xi) = e^2$$

$$\left| -\frac{(2-1)}{12} h^2 \right| \cdot e^2 \leq 0,5 \times 10^{-4} \Rightarrow h \leq 0,00901 \quad (1)$$

حل التمرين الثالث (08 نقاط) :

لدينا المعادلة غير خطية : $f(u) = ue^u - 3 = 0$ (1)

• الدالة f معرفة و مستمرة على المجال $[1, 1,5]$ $(0,5)$

$$f(1) \cdot f(1,5) = (-0,282) \cdot (3,721) < 0 \quad (0,5)$$

• الدالة f رتيبة تمامًا (متزايدة تمامًا) على المجال $[1, 1,5]$

$$\text{لأن : } f'(u) = e^u + ue^u = e^u(1+u) > 0, \forall u \in [1, 1,5] \quad (0,5)$$

طريقة القيم المتوسطة ذات الصلة (1) تقبل، هذا هو المطلوب

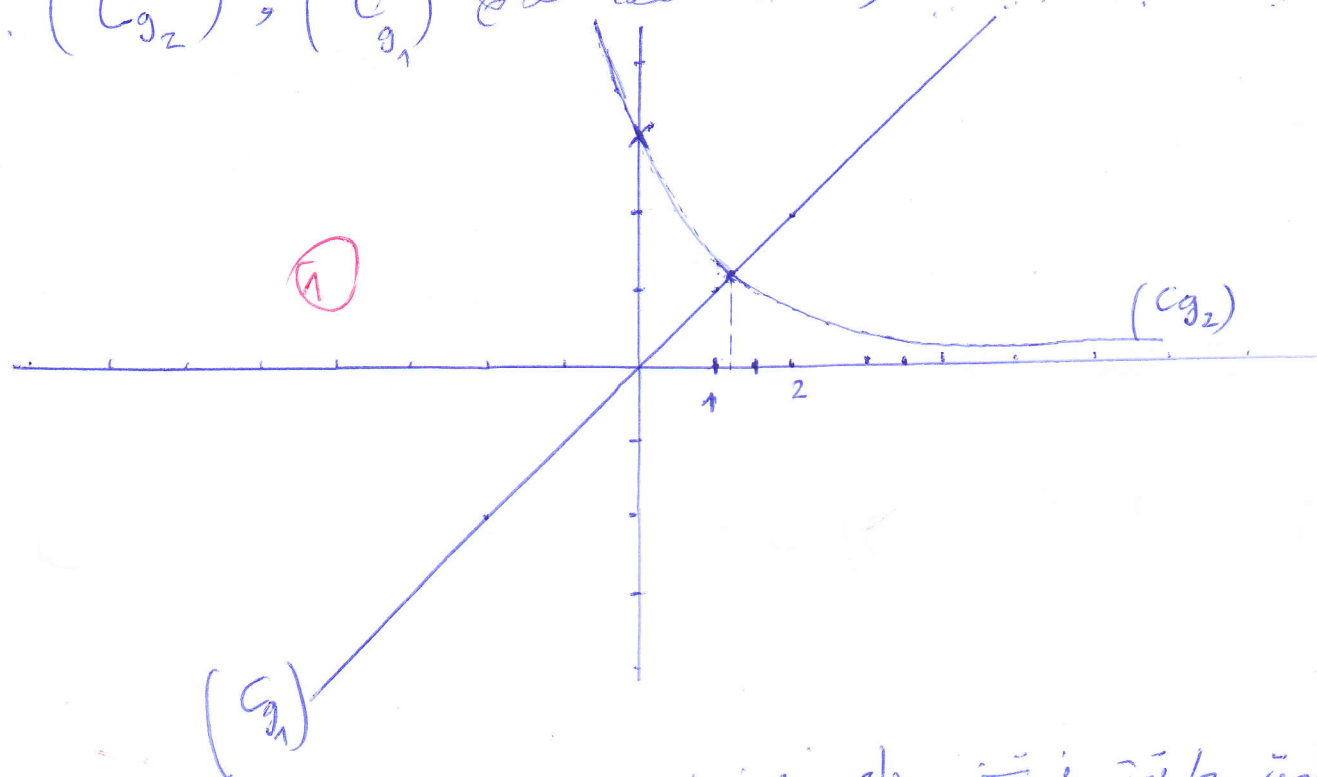
في المجال $[1, 1.5]$ ، 0.25

(2) إيجاد الحد الأدنى

$$ne^n - 3 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{3}{e^n}$$

نضع: $g_1(n) = n$ و $g_2(n) = 3e^{-n}$ 0.5

نلاحظ أن الحد الأدنى هو نقطة تقاطع (C_{g_1}) و (C_{g_2})



1.5

(3) تطبيق طريقة نيوتن - راسموس (0.25)

$f \in C^2([1, 1.5])$ و $f'(n) \times f''(n) < 0$ (موجب السؤال) 0.25

$f(n) = e^n(1+n) > 0, \forall n \in [1, 1.5]$ (مفيدة، متناقصا) 0.25

$f''(n) = e^n(2+n) > 0, \forall n \in [1, 1.5]$ 0.25

من أجل $n_0 = 1.5$: $f(1.5) \times f''(1.5) > 0$ 0.5

$$f(1.5) = 3.722534$$

$$f''(1.5) = 15.685917$$

نستطيع تطبيق طريقة نيوتن - راسموس لأن جميع شروط نظرية التقارب متحققة. 0.25

(4) الصيغة التكرارية تحسب كالآتي:

$$\begin{cases} n_{n+1} = n_n - \frac{f(n_n)}{f'(n_n)} = n_n - \frac{n_n e^{n_n} - 3}{e^{n_n}(1+n_n)} \\ n_0 = 1.5 \end{cases} \quad 0.5$$